محمدحسام‌قاسمی
کارشناس ارشد ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

سه مفهوم کلیدی ریاضی دورهٔ ابتدایی

اشاره

اضطراب از ریاضی، اهداف تدریس ریاضی و مدل‌سازی ریاضی سه مفهوم کلیدی از کتاب «مفاهیم کلیدی در تدریس ریاضیات دوره ابتدایی» هستند که «درک هایلوک و فیونا تانگاتا» نویسندگان این کتاب، با تألیف آن تلاش دارند چهل و چهار مفهوم مطرح (موضوع کلیدی و مهم) در برنامه درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی را به شیوه‌ای موجز و به نسبت جذاب و با ادبیاتی علمی اما نه چندان پیچیده معرفی و تبیین نمایند.

کلیدواژه‌ها: خطاها، جنسیت و ریاضی، کمتر موفق (ضعیف)، یادگیری طوطی‌وار، ریاضی بین برنامه‌ای، استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی، سواد عددی، استفاده و به‌کارگیری ریاضی، مدل‌سازی (نمایش)، فرایند، برقراری ارتباط، استفاده و به‌کارگیری ریاضی

اضطراب از ریاضی[1]

تعریف

«اضطراب» را می‌توان به‌عنوان یک «پاسخ احساسی پیچیده[2]» و اغلب ناخودآگاه که مهم‌ترین خصوصیت آن ترس و وحشت است، تعریف کرد (پیج و توماس[3]، ۱۹۷۹). این تعریف، به خصوصیتِ منفی اضطراب، یعنی ترس و وحشت اشاره می‌کند که در مورد برخی از افراد، مانع از به فعل در آمدن توانایی‌های بالقوهٔ آن‌ها در یک زمینهٔ خاص (به‌ویژه در مورد ریاضی) می‌شود. برخی از تجربه‌های یادگیری و سنجش در کلاس ریاضی، می‌تواند منشأ این نوع پاسخ روانی و عاملی برای ترس یا وحشت باشد.

توضیح و بحث

اضطرابِ برخی از دانش‌آموزان برای بهترین بودن در مدرسه و نگرانی آن‌ها از نتایج آزمون‌ها و اشتباه در تکلیف‌هایشان، امری کاملاً عادی است. اما منظور از پدیده‌ای که تحت عنوان اضطراب از ریاضی شناخته می‌شود، سطحی ناکارآمد و نامناسب از اضطراب است که باعث اختلال در توانایی افراد، برای یادگیری و انجام بهتر ریاضی می‌شود. هایلاک (۱۹۸۶) عنوان می‌کند که ۲۶ درصد از دانش‌آموزان ۱۰ تا ۱۱ ساله که از دید معلمانشان، در درس ریاضی ضعیف محسوب می‌شدند، دارای سطحی غیرعادی از اضطراب از ریاضی بودند که

در گزارش وی، این سطح در دختران، بسیار برجسته‌تر از پسران بود. مطابق گزارش فورد[4] و همکاران (۲۰۰۵)، برخی از دانش‌آموزان ۱۰ ساله در زمینهٔ اضطراب ریاضی، احساسی مشابه با اکثر بزرگسالان دارند و اضطراب از ریاضی، با حافظهٔ کاری[5] که برای انجام محاسبات به آن نیاز داریم، مرتبط است؛ به این صورت که افراد مضطرب در عمل، کارایی کمتری نسبت به بقیه دارند. اضطراب ناشی از رقابت کردن و مقایسه شدن در بین دانش‌آموزان هنگام انجام کارهای ریاضی، خود پدیدآورندهٔ افکار مزاحم و ناخواسته‌ای می‌شود که کاهش فضای ذهنی و حافظه و اختلال در فرایندهای ریاضی را به دنبال خواهد داشت.

اشکرافت و کیرت[6] (۲۰۰۱) معتقدند که اضطراب ریاضی، به دو صورت باعث اختلال در عملکرد می‌شود. اول اینکه نوعی ممانعت در مسیر یادگیری ایجاد می‌کند و در نتیجه منجر به کاهش میزان شایستگی می‌گردد و دوم اینکه، اضطراب به‌طور موقت، مانع بازخوانی یا بهره‌گیری مفید از ظرفیت حافظه می‌شود. هم‌چنین، آن‌ها توضیح می‌دهند که چرا مداخله‌هایی که متأثر از اضطراب از ریاضی هستند، جزو رفتارهای شناختی قرار می‌گیرند. لازم است معلمان با آگاهی از این موضوع، به دانش‌آموزان مضطربشان یاد دهند که چگونه اضطراب خود را کنترل کنند. آن‌ها در ادامه، بیان می‌کنند که اضطراب ریاضی آموخته می‌شود، پس می‌توان از طریق آموزش مانع ایجاد اضطراب شده و بر آن غلبه نمود.

اضطراب از ریاضی، به شیوه‌های مختلفی خود را نشان می‌دهد که در زیر، به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱. زمانی که دانش‌آموز با یک تکلیف ریاضی روبه‌رو می‌شود، ترس او را فرا می‌گیرد و این ترس باعث می‌شود که او نتواند به خوبی فکر کند و حتی از عهدهٔ کارها و چیزهایی که قبلاً یاد گرفته است و انتظار می‌رود آن‌ها را انجام دهد، برآید.

۲. زمانی‌که دانش‌آموز با یک تکلیف ریاضی روبه‌رو می‌شود، هراسان شده و به شدت نگران می‌شود که مبادا به آن پاسخ غلط بدهد.

۳. دانش‌آموز در مورد توانایی خود در انجام یک موضوع خاص ریاضی دچار باور و عقیده‌ای نادرست است و تصور می‌کند که در هنگام مواجهه با هر نوع ارزشیابی دربارهٔ آن موضوع، عملکرد بدی خواهد داشت.

۴. اگر دانش‌آموز خود را متقاعد کند که ریاضی را نمی‌فهمد، سعی می‌کند همه چیز را طوطی‌وار یاد بگیرد و به‌جای درک عمیق از قوانین و اصول ریاضی، آن‌ها را حفظ کند.

این نوع اضطراب‌ها، اغلب ریشه در تعامل بین تجارب دانش‌آموزان از کلاس درس و ویژگی‌های فردی آن‌ها دارد، به این معنی که برخی از دانش‌آموزان در رابطه با کنار آمدن با اشتباه‌ها و شکست‌هایشان به خوبی دیگران نیستند. یکی از نکات منفی در مورد ریاضی مدرسه‌ای این است که پس از حل یک مسئله، درستی و نادرستی پاسخ آن مورد ارزیابی و قضاوت قرار می‌گیرد و یادگیری هر فرد با دیگر دانش‌آموزان کلاس، مقایسه می‌شود.

والدینِ کودکان و معلمان مدارس ابتدایی نیز ممکن است اضطراب بالایی از ریاضی داشته باشند و این اضطراب را به کودکانشان نیز، انتقال دهند. هایلاک (۲۰۰۶: ۴-۳) گزارش می‌دهد که بعضی از دانشجو- معلمان رشتهٔ آموزش ابتدایی، دوره‌های کارورزی خود را، با اضطراب بالایی از ریاضی شروع می‌کنند که این امر می‌تواند، ریشه در تجربهٔ آن‌ها از یادگیری ریاضی در دوران مدرسه، داشته باشد. برای مثال، هنگامی که از دانشجو- معلمان خواسته شد که دربارهٔ خاطرات خود از کلاس‌های درس ریاضی صحبت کنند، آن‌ها به تجربهٔ ترس، وحشت و حتی کابوس‌های شبانه از ریاضی، اشاره کردند.

منظور از پدیده‌ای که تحت عنوان اضطراب از ریاضی شناخته می‌شود، سطحی ناکارآمد و نامناسب از اضطراب است که باعث اختلال در توانایی افراد، برای یادگیری و انجام بهتر ریاضی می‌شود

مثال‌های عملی

معلمان باید در کلاس‌های درس خود، از احتمال بروز اضطراب از ریاضی در دانش‌آموزان که ناشی از روش‌های تدریس نامناسب است، آگاه باشند. برخی از روش‌های عملی که معلمان می‌توانند برای مهار اضطراب از ریاضی به‌کار گیرند، در زیر آورده شده است.

۵. نسبت به دانش‌آموزانی که اضطراب غیرسازنده دارند، حساس باشیم. هدف‌هایی را برای کاهش اضطراب آن‌ها از طریق تشویق، تضمین و ممانعت از

اِعمال فشـــار غیرضروری بر ایشان، تنظیم کنیم. برای مثال، نباید از آن‌ها انتظار داشته باشیم که حتماً به همهٔ سؤال‌ها پاســخ دهند و یا فرایندهای ریاضی را به‌طور کامل توضیح داده و اثبات کنند.

۶. انجام تکلیف‌های ریاضی را به درست یا نادرست بودن پاسخشان، محدود نکنیم.

۷. در طراحــی فعالیت‌های دانش‌آموزان، مطمئن شــویم که بین میزان دشــواری و چالشی بودن آن‌ها از یــک طرف و موفقیت در انجامشــان از طرف دیگر، تعادل وجود دارد. دانش‌آموزان به چالش‌ها علاقه‌مندند، درگیرشان می‌شوند، به آن‌ها پاسخ می‌دهند. اما نباید ســطح این چالش‌ها به‌گونه‌ای باشد که موفقیت‌های محدود و شکســت‌های مکــرر دانش‌آمــوزان، باعث اضطراب و پایین آمدن اعتماد به نفسشان شود.

۸. بدانید که جوابِ درســت، تنها چیزی نیســت که دانش‌آموزان بایــد در کلاس‌های ریاضی به خاطر آن تشویق شــوند. تشویق، ستاره دادن، جایزه و غیره، می‌تواند برای ارائهٔ نظرات سازنده، افکار خلاقانه، حضور در فعالیت‌ها، خطرپذیری و پیشرفتِ درسی نیز، در نظر گرفته شود.

۹. بدانید که برخی از دانش‌آموزان به زمان بیشتری بــرای فکر کردن نیاز دارند؛ بنابراین تأکید بیش از حد بر انجام سریع تکلیف‌های ریاضی، کار درستی نیست و انتظار نداشته باشید که کودکان، فوراً به سؤال‌ها پاسخ دهند.

۱۰. ریاضــی را طوری برای کــودکان لذت‌بخش کنید که خودشان بخواهند در انجام آن شرکت کنند و از ریاضی فراری نباشند.

۱۱. نسبت به ریاضی، نگرش‌های مثبت ایجاد کنید و موضوع درسی را با شور و شوق و شوخی و سرگرمی همراه سازید و به دانش‌آموزان خود نشان دهید که خود شما نیز از ریاضی لذت می‌برید و برای آن، ارزش قائل هستید.

۱۲. جــوّی در کلاس درس ایجــاد کنیــد کــه دانش‌آمــوزان، احســاس کننــد معلمشــان پذیرای سؤال‌هایشان است و دوست دارد بداند که آن‌ها، کدام مطالب را نفهمیده‌اند.

۱۳. هنگامی که دانش‌آموزان را مورد ارزشــیابی قرار می‌دهید، حتماً تأکید داشــته باشــید که هدف اصلی از این کار، سنجش کیفیت آموزش آن‌ها و ارائهٔ آموزش‌هــای بهتری در آینده اســت و هدف، مؤاخذه کردن آن‌ها نیست.

۱۴. در طرح درس‌های خود، هدف‌هایی را نیز برای توسعهٔ انگیزشــی دانش‌آموزان در نظر بگیرید و سعی کنید هر چند وقت یک بــار، دانش‌آموزان این فرصت را داشته باشند که دربارهٔ احساسشان نسبت به ریاضی صحبت کنند و یا مطالبی را مکتوب بنویسند.

مطالعهٔ بیشتر

باکســتن[۷] (۱۹۹۱) در کتاب جذاب خود، دربارهٔ ترس ناشی از ریاضی، بیان می‌کند که باید برای هیجان و احساســات نیز مانند شــناخت در آموزش ریاضی، اهمیت قائل شــد. اگر به دنبال خلاصه‌ای از تحقیقات انجام شده در این زمینه هستید، به فصلی تحت عنوان «دربارهٔ پیامدهای شناختی اضطراب ریاضی[۸]» نوشته شــده توسط اشکرافت و همکاران (در دانلن[۹]، ۱۹۹۸)، مراجعه فرمایید.

اهداف تدریس ریاضی[۱۰]

تعریف

اهــداف تدریــس ریاضــی، اهداف بلنــد مدتی هســتند که باهــم، توجیهــی برای حضــور پررنگ ریاضی در برنامهٔ درســی مدرســه‌ای‌اند. این هدف‌ها، پاســخی برای این ســؤال هســتند که «چرا ریاضی تدریــس می‌شــود؟». به‌طور عمده، اهــداف تدریس ریاضــی در پنج مقولهٔ «ســودمندی[۱۱]»، «کاربرد[۱۲]»، «مهارت‌هــای قابل‌انتقال[۱۳]»، «زیبایی‌شــناختی[۱۴]» و «معرفت‌شناسی[۱۵]» قرار می‌گیرند.

توضیح و بحث

برنامهٔ درســی ملی انگلستان شــامل بخش‌های گوناگونی است که بخش ریاضی‌اش، با مقدمه‌ای شروع می‌شــود که در آن، به نوعی به هــر پنج مقولهٔ بالا از اهداف تدریس ریاضی، اشاره شده است:

«ریاضی، دانش‌آموزان را به مجموعه‌ای از ابزارهای منحصربه‌فــرد و قدرتمند بــرای درک بهتر جهان و ایجاد تغییــر در آن، مجهز می‌ســازد. مهم‌ترینِ این ابزارها عبارت‌اند از: استدلال منطقی، مهارت‌های حل مســئله و توانایی فکر کردن به شکل انتزاعی. ریاضی از نقش ویژه‌ای در زندگی انســان‌ها برخوردار است و

اشکرافت و کیرت (۲۰۰۱) معتقدند که اضطراب ریاضی، به دو صورت باعث اختلال در عملکرد می‌شود. اول اینکه نوعی ممانعت در مسیر یادگیری ایجاد می‌کند و در نتیجه منجر به کاهش میزان شایستگی می‌گردد و دوم اینکه، اضطراب به‌طور موقت، مانع بازخوانی یا بهره‌گیری مفید از ظرفیت حافظه می‌شود

این نقش، به‌خوبی در بسیاری از مشاغل، شاخه‌های مختلف علم و فن‌آوری، پزشکی، اقتصاد، محیط زیست و تصمیم‌گیری‌های اجتماعی جهت پیشرفت‌های اجتماعی، مشهود است. در طول تاریخ، فرهنگ‌های مختلفی بر توسعه و استفادهٔ هر چه بیشتر از ریاضی تأثیرگذار بوده‌اند. امروزه ریاضی به‌عنوان یک موضوع جهانی و فراتر از مرزهای انسانی، شناخته می‌شود. ریاضی، یک نظام علمی پویا و خلاق است که مملو از لحظه‌ها و فرصت‌های لذت‌بخش، چالش‌برانگیز، تعجب‌آور و تحریک‌کنندهٔ تفکر است. هنگامی که یک دانش‌آموز راه‌حلی ظریف و زیبا برای مسئلهٔ پیش روی خود کشف می‌کند و به‌طور ناگهانی متوجه ارتباطات پنهان بین اجزای یک مسئله می‌شود، به خوبی طعم هر کدام از این حس‌ها را می‌چشد» (DFEE, 1999a: ۶۰).

ریاضی، دانش‌آموزان را به مجموعه‌ای از ابزارهای منحصربه‌فرد و قدرتمند برای درک بهتر جهان و ایجاد تغییر در آن، مجهز می‌سازد. مهم‌ترینِ این ابزارها عبارت‌اند از: استدلال منطقی، مهارت‌های حل مسئله و توانایی فکر کردن به شکل انتزاعی

اهداف سودمندانه

هدف‌های سودمندانهٔ تدریس ریاضی در مدرسه، بیشتر با سواد عددی افراد گره خورده است. به این معنی که ریاضی به‌خصوص سواد عددی، ابزاری است که انسان به کمک آن، می‌تواند از عهدهٔ نیازهای ریاضی خود در زندگی روزانه‌اش برآید و در کار و شغل خود، از آن بهره گیرد. امروزه در بیشتر کشورها، برخورداری از یک سطح پایه‌ای و حداقلی از حساب عددی، جزو نیازهای ابتدایی برای اکثر مشاغل است. تسلط بر اعداد و شمارش، اندازه‌گیری، شناخت و به‌کارگیری شکل‌ها و محاسبهٔ طول، سطح و حجم، کار با پول و درک حساب و کتاب‌های مالی و شخصی، پردازش داده‌های عددی، کار با نمودارها، گراف‌ها و تفسیر آن‌ها، از جمله مهم‌ترین موضوعات سواد عددی هستند که در محیط کار و زندگی روزانه مورد استفاده قرار می‌گیرند. این واقعیت که برای مواجه شدن با بسیاری از موقعیت‌های موجود در زندگی واقعی و محیط کسب‌وکار، داشتن مهارت‌های محاسباتی ضروری است، به خودی خود می‌تواند دلیلی کافی برای قرار گرفتن ریاضی به‌عنوان یک موضوع مهم در برنامهٔ درسی باشد (گولدینگ[۱۶]، ۱۹۹۷: ۱۲۸).

کاربرد

یک هدف مهم برای تدریس ریاضی، مجهز کردن دانش‌آموزان به اطلاعات و مهارت‌هایی است که در موضوعات درسی دیگرِ برنامهٔ درسی نیز، به آن‌ها نیاز پیدا می‌کنند. برای مثال، قبلاً در نقل‌قولی از برنامهٔ درسی ملی انگلستان، به اهمیت این هدف (کاربردی بودن ریاضی) در علوم و تکنولوژی، پزشکی، اقتصاد و غیره اشاره شده بود. گولدینگ (۱۹۹۷: ۱۲۹)، برخی موارد نیاز به مهارت‌های عددی و کار با داده‌ها را در تاریخ و جغرافی، زیست‌شناسی، سنجش و اندازه‌گیری، تناسب و مقیاس در کارهای هنری، تکنولوژی، علوم و مهارت‌های جبری در علوم را شناسایی کرده است. فرودنتال[۱۷] (۱۹۷۳: ۶۷) در کتاب خود با عنوان «ریاضی به‌عنوان یک تکلیف آموزشی[۱۸]»، درحالی‌که به اهمیت کاربرد در ریاضی توجه می‌کند، یک تذکر واقع‌بینانه را نیز بیان می‌نماید که «تمام ما، درک می‌کنیم که ریاضی اجازهٔ کاربردهای متعدد را می‌دهد و دانش‌آموزان بیشتری نسبت به قبل، باید ریاضی را به‌کارگیرند. اگر بتوانیم به هر یک از آن‌ها بگوییم که در آینده به کدام مفاهیم و تکنیک‌های ریاضی نیاز پیدا خواهند کرد، باعث خوشوقتی است».

مهارت‌های قابل‌انتقال

ممکن است هدف از تدریس ریاضی، پرورش انواع خاصی از مهارت‌های فکری باشد و اغلب فرض بر این است که فعالیت‌های ریاضی، باعث افزایش ظرفیت هوش عمومی دانش‌آموزان می‌شود و آن‌ها را برای به‌کارگیری انواع استدلال‌ها در موقعیت‌های حل مسئله، آماده می‌کند. این هدف، به نوعی در نقل‌قولی که پیشتر، از برنامهٔ درسی انگلستان آمده، مستتر است. نشانهٔ آن هم سهم بالقوهٔ ریاضی برای ارائه و پرورش استدلال منطقی، حل مسئله و تفکر انتزاعی است که در این سند، به آن اشاره شده است. در سال‌های اخیر، گرایش‌های قابل‌توجهی به توسعهٔ «مهارت‌های فکری[۱۹]» در آموزش دورهٔ ابتدایی در بریتانیا، قابل مشاهده هست؛ اما با همهٔ این‌ها، آنچه هنوز به‌طور روشن مشخص نشده است، میزان قابل‌انتقال بودن مهارت‌های فکریِ ریاضی به دیگر موقعیت‌هایی است که دانش‌آموزان با آن‌ها، در آینده مواجه می‌شوند. حتماً انجام دادن ریاضی در سطحی قابل‌اطمینان، به انواع خاصی از تفکر منطقی مانند استدلال تحلیلی، استدلال استنتاجی و آگاهی نسبت به تفاوت‌های بین یک حدسیه و یک تعمیم اثبات‌شده نیازمند است.

هم‌چنیـــن، در نقطهٔ مقابـــل در زندگی واقعی و جایی که ادعا داریم ریاضی می‌تواند به کمک انســـان آمده و کاربردی شود نیز، انواع قدرتمند تفکر و استدلال وجود دارد؛ اما ســـؤال اصلی این اســـت که اگر پرورش تفکر ریاضی و اســـتدلال منطقی بر استدلال‌ها و تفکرها و تصمیم‌گیری‌های انسان در زندگی شخصی مؤثر است، دامنهٔ این تأثیر تا کجا و تا چه اندازه است؟ آیا همیشه و همـــواره در همهٔ موقعیت‌ها، کاربـــرد آن‌ها را حس می‌کنیـــم؟ یعنی تا چه حد تفکر و اســـتدلال ریاضی، قابل‌انتقال به زندگی شخصی ماست؟ آیا می‌توان تفکر منطقی و توانایی استدلال کردن را که از طریق ریاضی پرورش یافته اســـت، برای حل مسئله‌های شخصی در محل کار، امور مالی و بحث‌های سیاسی، منتقل کرد؟

مهارت زیبایی‌شناختی

در نقل‌قول بیان‌شـــده از برنامهٔ درسی انگلستان، بر احســـاس شـــگفتی و لذت بردن از درگیر شدن با ریاضی توســـط دانش‌آموزان، اشاره شده است. در این سند، عنوان می‌شود که جنبهٔ زیبایی‌شناختی، با همان کیفیتی که برای آموزش هنر، موسیقی و شعر و ادبیات مطرح است، برای تدریس ریاضی نیز موضوعیت دارد. ریاضی منبع سرشاری از تجارب زیبایی‌شناسانهٔ انسانی اســـت و این امر، مسئولیت ما را در گشایش پنجره‌ای به‌ســـوی زیبایی و لطافت‌های ریاضی در برابر چشمان دانش‌آموزانمان، افزایش می‌دهد. فرودنتال (۱۹۷۳: ۶۳) اعتقاد دارد کـــه «از هدف‌های تدریس ریاضی، همین بس کـــه می‌توان کودکان را با نظـــمِ زیبای نهفته در نظام ریاضی آشنا کرد، نظمی درخشان از افسون‌های انکارناپذیر و دلربایی‌های زیبا ...». هم‌چنین فرودنتال، به این نکته نیز اشاره می‌کند که «به‌هرحال این زیبایی‌ها، توسط افرادی که فاقد دانش و درک عمیقی از ریاضی هستند، قابل مشاهده نیست». اگر آگاهی از زیبایی‌ها و چشیدن لذت‌های ریاضی را یک حق طبیعی و متناسب با فطرت انســـانی بدانیم، تدریس ریاضی و ورود آن به برنامهٔ درســـی مدرســـه‌ای، تنها با تکیه بر همین حقِ دانش‌آموز، قابل توجیه است.

مهارت معرفت‌شناسانه

یکی از مباحثی که پیرامون اهداف زیبایی‌شناسی مطرح است، آن اســـت که آیا این اهداف، واقع‌بینانه و قابل‌طرح برای همهٔ دانش‌آموزان هســـت یا خیر؟ (آیا این حس لذت و زیبابینی ریاضی مشـــمول همه است یا فقط برای تعدادی خاص و آن‌هایی که نکته‌ســـنج هستند، قابل درک اســـت؟)، به‌خصوص این بحث در مورد پنجمین جنبه از اهـــداف تدریس ریاضی یعنی معرفت‌شناسی، بیشتر مطرح می‌شود. ریاضی حوزه‌ای متمایز و جهان شمول از دانش بشری است که همان طور که در نقل‌قول برنامهٔ درســـی نیز بیان شده، طی قرن‌های متمادی و توســـط فرهنگ‌هـــا و تمدن‌های مختلف بشری و متناســـب با نیاز آن‌ها، شکل گرفته است. یک تعریف از انسان تحصیل کرده می‌تواند این باشد که چنین فردی، کســـی است که درکی نسبت به موضوعات اصلی دانش داشته باشد. در نتیجه برای چنین انسانی، آشنایی با اصول حوزهٔ آکادمیک ریاضی، به همان اندازه اساســـی اســـت که آشـــنایی با شواهد تاریخی یا شناخت ماهیت نظریه‌های علمی لازم است؛ بنابراین، لازم است که دانش‌آموزان، با ریاضی و راه‌هایی که ریاضی‌دان‌ها از طریق آن‌ها استدلال می‌کنند، آشنا شوند. این به این معنا نیست که می‌خواهیم تظاهر کنیم که تمام دانش‌آموزان را به گونه‌ای آموزش می‌دهیم که بالقوه، ریاضی‌دان شوند. این موضوع به خوبی، در نگاه و گفته‌های فرودنتال قابل مشاهده است:

«یک چیز را می‌توان با اطمینان بالایی پیش‌بینی کرد و آن اینکـــه احتمالاً دانش‌آموزِ مـــن [دانش‌آموز متوســـط] به یک ریاضی‌دان تبدیل نمی‌شود ... اما باید دوباره و دوباره، بر این نکتهٔ ســـاده و به راحتی فراموش شـــده تأکید کنم که به‌غیر از ریاضی‌دانان آینده، اغلبِ انســـان‌ها باید ریاضی را یاد بگیرند. چه کســـانی که به ریاضی در سطح عالی و ظریف و دقیق آن احتیاج دارند که در اقلیت‌اند، چه کسانی که تنها به کاربردهای محدود ریاضی نیازمندند و حتی کسانی که هیچ‌گاه ریاضی را به‌کار نمی‌بندند، به ریاضی، به‌عنوان یکی از جنبه‌های انسانی، نیاز دارند.» (فرودنتال، ۱۹۷۳: ۹-۶۸).

مثال‌های عملی

شـــاید چنین گفته شـــود که معلمان، طرح کار و طرح درس‌های روزانه و سالیانهٔ خود را براساس منابع پیشنهادی و مجاز درسی و اهدافِ میان‌مدت طراحی می‌کنند، اما این به آن معنا نیست که این طرح درس‌ها و برنامه‌های سالیانهٔ مدارس، بی‌ربط با پنج جنبهٔ عنوان

شـــده از اهداف تدریس ریاضی هســـتند. این پنج نوع هدف، در سطح سیاســـت‌گزاری و طراحی برنامه‌های درسی مدرســـه‌ای برای ریاضی مطرح‌اند که قرار است در مرحلـــهٔ عمل نیز دیده شـــوند. در ادامهٔ این بخش، بـــه مثال‌هایی از موقعیت‌هایـــی می‌پردازیم که بیانگر توجه به هدف‌های بالا هســـتند. وقتـــی این هدف‌ها به‌عنوان سیاست‌های برنامهٔ درسی به تصویب می‌رسند، بازرســـان و ناظران انتظار دارند که شواهدی از آن‌ها را در طرح‌های میان‌مدت و به‌طور واقعی در کلاس درس مشاهده کنند. در ادامه، به پنج رویکرد عملی که لازم است معلمان، متناسب با این پنج هدف، در برنامه‌های تدریس خود اتخاذ کنند، می‌پردازیم.

- برخوردار کـــردن دانش‌آموزان از یک شـــالودهٔ محکمِ مهارت‌های ریاضی پایه، برای آنکه آن‌ها را قادر سازد تا در مواجهه با موقعیت‌های عددی، موقعیت‌هایی کـــه به‌طور طبیعـــی در زندگی روزمرهٔ خـــود با آن‌ها مواجهند، در زندگی آیندهٔ خود به‌عنوان یک بزرگسال، یک شـــاغل در محیط کار خود و حتی یک شـــهروند معمولی، عملکرد مطمئنی داشته باشند.
- مجهز کردن دانش‌آموزان بـــه دانش و مهارت‌هایی که برای به‌کارگیری ریاضی در سایر موضوعات برنامهٔ درسی، به آن‌ها نیازمندند؛ هم‌چنین آگاه کردنشان از نقش مهم ریاضی در حوزه‌های دیگر یادگیری.
- توسعهٔ توانایی دانش‌آموزان در ریاضیات برای داشتن تفکر منطقی، توضیح استدلال‌ها و تحلیل و به‌کارگیری اســـتراتژی‌های حل مسئله، تشخیص الگوها و تعمیم مفاهیم و اصول.
- ترویج نگرش مثبت نســـبت به چیزی که در ذهن دانش‌آموز، به عنوان ریاضی شـــکل گرفته است و این کار، از طریـــق در اختیار قـــرار دادن فرصت‌هایی برای تجربـــهٔ ریاضیات پویا، خلاق، لذت‌بخش، زیبا و جذاب تضمین می‌شود.
- اطلاع‌رسانی و آگاه کردن دانش‌آموزان از نقش، سهم و تلاش‌های تاریخی فرهنگ‌ها و تمدن‌های مختلف در شکل‌گیری بدنهٔ اصلی دانش ریاضی.

منظور از «مدل‌سازی ریاضی»، به‌کارگیری زبان و نمادهای ریاضی برای نمایش دادن یک مسئله در دنیای واقعی و انتقال آن به دنیای ریاضی است تا با دست‌ورزی با نمادها و انجام محاسبات ریاضی، راه حلی ریاضی برای آن مسئله پیدا شود

مطالعهٔ بیشتر

برای داشـــتن یک دید متفاوت از اهداف تدریس ریاضـــی، می‌توان فصل «چرا تدریـــس ریاضی؟[۲۰]» از پاول ارنست[۲۱] (نقل شده در وایت و برامال[۲۲]، ۲۰۰۰) را مطالعـــه کرد. گفته‌های ارنســـت بســـیار جذاب و پرچالش‌انـــد. دیگر فصل‌های این منبـــع نیز با اهداف تدریس ریاضی مرتبط هستند و می‌توان به آن‌ها ارجاع نمود.

فرایند مدل‌سازی (نمایش)[۲۳]

تعریف

منظور از «مدل‌ســـازی ریاضی»، به‌کارگیری زبان و نمادهای ریاضی برای نمایش دادن یک مســـئله در دنیای واقعی و انتقال آن به دنیای ریاضی اســـت تا با دست‌ورزی با نمادها و انجام محاسبات ریاضی، راه حلی ریاضی برای آن مسئله پیدا شود. بعد از یافتن راه حل ریاضی، تفســـیر و تبدیل آن به راه حلی واقعی، مکمل این فرآیند اســـت. به‌طور خلاصه، فرآیند مدلسازی به معنای حرکت میان دنیای واقعـــی و دنیای نمادهای مجرد در ریاضیات است.

توضیح و بحث

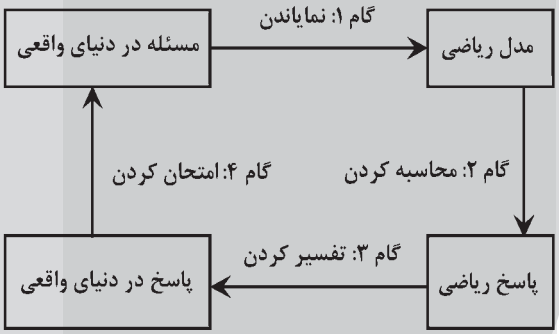
استفاده از ریاضی برای حل مسائل واقعی زندگی، همیشـــه به‌عنوان یکی از هدف‌های کلیدی این شاخه از دانش مطرح بوده اســـت. در حقیقت، این به معنای اختصـــاص انـــواع مختلفـــی از مدل‌هـــای ریاضی به موقعیت‌های واقعی زندگی و نمایاندن این موقعیت‌ها در نمادهای ریاضی است. برای مثال در نظریهٔ سنجش[۲۴]، یکی از موضوع‌های مهم، میزان پایا بودن[۲۵] یک آزمون است. یکی از مدل‌های ریاضی برای اندازه‌گیری میزان پایایی آزمون‌ها، اســـتفاده از متغیر r (r عددی اســـت بین ۰ تا ۱۰۰ درصد که نزدیکی این عدد به ۰ نشانهٔ ناپایایی و نزدیکی آن به ۱۰۰ نشـــانهٔ پایایی بیشـــتر یک آزمون اســـت) در فرمول $r=200c\div(1+c)$ است. در این فرمول، c نشـــانهٔ مقدار همبستگی بین نمرات دانش‌آموزان در دو نیمهٔ یک آزمون است. طراح آزمون می‌تواند به کمک این مدل، میزان پایایی یک آزمون را بسنجد. مثلاً با قرار دادن همسبتگی به میزان $c=0/25$ در این فرمول، مقدار پایایی $r=40$ به دست می‌آید که می‌توان آن را این طور تفســـیر کرد که سطح دشواری آزمون ۴۰ درصد اســـت و در نتیجه ســـطح آزمون به اندازهٔ کافی بالا نیست و می‌بایست با تغییر دادن برخی از سؤال‌های آزمون، این عدد را بهبود بخشید.

مثال فوق، نمونهٔ مناسبی است که به‌طور خلاصه

فرآیند مدلســـازی را برای ما آشکار می‌سازد. در سطح عالی‌تر، فرآینـــد به‌کار رفته در این مثـــال را می‌توان این‌طور نیز بیان کرد: نمایاندن یک موقعیت واقعی در نمادهای جبری، کار بر روی نمادها با استفاده از قواعد ریاضی برای دست‌یابی به یک جواب ریاضی، تفسیر این پاسخ برای درک بهتر آن و در نهایت بازگشت به دنیای واقعی. انگلیش[۲۶] و همـــکاران (۲۰۰۲: ۷۹۰)، ضمن مطالعه و بحث بر روی مســـیرهای پیش روی آموزش ریاضی، عنوان می‌کنند که کاربـــرد ایده‌های کلیدی ریاضی در «مدلســـازی از موقعیت‌های متنوع دنیای واقعـــی» از «اصول موفقیت در محیـــط کار و زندگی روزانه» به حساب می‌آید.

بحث دیگر، میزان و کیفیت استفادهٔ دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایـــی از این فرآیند اســـت. شـــکی نیســـت کـــه اولین تجربه‌های مدلســـازی، خواه یـــا ناخواه در ســـال‌های اولیهٔ دورهٔ ابتدایی شکل می‌گیرند. انگلیش و واترز[۲۷] (۲۰۰۵: ۵۹) معتقد هســـتند که بسیاری از تحقیقات در این زمینه، این ایده که «مدارس ابتدایی، محیط‌هایی آموزشی هستند که باید بچه‌ها به شکلی معنی‌دار استفاده از مدلســـازی ریاضی را آغاز کرده و در آن پیشرفت کنند» را پشتیبانی و تقویت می‌کنند. این همان ایده‌ای اســـت که استراتژی مدارس ابتدایی انگلســـتان نیز به آن توجه کرده و آن را تحت اصطلاح «نمایاندن»[۲۸] به‌عنوان یکی از پنج مشـــخصهٔ استفاده و به‌کارگیـــری ریاضیـــات (b,DfES ۲۰۰۶) به‌کار برده است. طبق این سند (در پاراگراف ۷)، «فرآیند انتخاب اطلاعات کلیدی مورد نیاز [از بطن یک مسئلهٔ واقعی]، نمایاندن مسئله [به کمک نمادهای ریاضی]، استفاده از محاسبات ریاضی، جداول و نمودارها، اساس فرآیندی را تشـــکیل می‌دهند که به مدل‌سازی ریاضی موسوم است». همچنین در این سند (پاراگراف ۸) آمده است که «آن هنگام که کودکان برای شمارش اشیا و یافتن تعداد آن‌ها از چوب خط‌ها و بلوک‌ها استفاده می‌کنند یا از جملات ریاضی برای نمایش محتوای یک مسئلهٔ کاربردی کمک می‌گیرند، در واقع آن‌ها سفر خود برای تبدیل شدن به یک مدل‌ساز ریاضی را آغاز کرده‌اند».

هایـــلاک (۲۰۰۶: فصل ۴) برای روشـــن شـــدن چگونگی به نمایش درآوردن (نمایاندن) ســـاختارهای مختلف موقعیت‌های زندگی در قالب جمله‌های ریاضی، یک جملهٔ تفریـــق (مثـــلاً ۵= ۷-۱۲) را مثال می‌زند



شکل ۱. فرآیند مدل‌سازی ریاضی

و ایـــن جمله را نمایش دو نوع دیدگاه به مســـئله‌های واقعی عنوان می‌کند. این دو نوع دیدگاه در اصل دو راهِ نمایاندن یا «مدلسازی شدنِ»[۲۹] مسائل در قالب عمل تفریق است که یکی عکس عمل جمع‌کردن (مثلاً در موقعیت واقعی، داشتن پس انداز ۷پنی و یافتن مقدار پول مورد نیاز برای خرید یک کالای ۱۲پنی) و دیگری مقایسه کردن است (مثلاً یک کودک ۱۲کیلویی چقدر از یک کودک ۷کیلویی سنگین‌تر است؟).

در شـــکل ۱، فرآیند مدل‌ســـازی ریاضی را به‌طور خلاصه مشاهده می‌کنید. این فرآیند از یک مسئله در دنیای واقعی آغاز می‌شـــود. در گام اول، این مسئله به شکل نمادهای ریاضی به نمایش در می‌آید و اصطلاحاً مسئلهٔ نمایانده یا فرموله می‌شود. این مرحله شامل تغییر در بافت اولیهٔ مسئله است. یا به‌طور واضح‌تر، ساختارهای ریاضی و اصلی نهفته در متن واقعی مســـئله استخراج می‌شـــود و عددهای لازم از بستر اصلی مسئله، معمولاً به کمک اندازه‌گیری، جمع‌آوری می‌شـــوند. اکنون فرد مســـئله حل‌کن در حال قدم زدن در دنیای ریاضیات است. در این دنیا که «یک دنیای منظم و عموماً پایدار اســـت، بســـتر لازم برای کار کردن و فکر کردن فراهم اســـت» (b,DfES ۲۰۰۶:۷)، بـــدون آن که عواملِ غیر ریاضیِ مسئله، مزاحمتی در راه‌کار و تفکر ریاضی شخص ایجـــاد کنند. گام دوم، مرحلهٔ انجام محاســـبات لازم و اجـــرای برخی از فرآیندهای ریاضی بر روی اطلاعات یا مدل به‌دســـت آمده است تا یک جواب ریاضی به‌دست آید. در گام سوم، این پاسخ باید از بافت ریاضی به بافت واقعی و اصلی خود برگردانده شود و آن را تفسیر کنیم تا به یک پاسخ ملموس برسیم. گام آخر، مرحلهٔ آزمون کردن است. در این مرحله، پاسخ را امتحان می‌کنیم تا

فرودنتال (۱۹۷۳: ۶۷) در کتاب خود با عنوان «ریاضی به‌عنوان یک تکلیف آموزشی»، درحالی‌که به اهمیت کاربرد در ریاضی توجه می‌کند، یک تذکر واقع‌بینانه را نیز بیان می‌نماید که «تمام ما، درک می‌کنیم که ریاضی اجازهٔ کاربردهای متعدد را می‌دهد و دانش‌آموزان بیشتری نسبت به قبل، باید ریاضی را به‌کارگیرند. اگر بتوانیم به هر یک از آن‌ها بگوییم که در آینده به کدام مفاهیم و تکنیک‌های ریاضی نیاز پیدا خواهند کرد، باعث خوشوقتی است»

مطمئن شـــویم که متناسب با مسئلهٔ واقعی بوده و بامحدودیت‌ها و قیود آن مسئله همخوانی دارد.

باید این موضوع را در نظر داشـــت که این فرایند چرخه ماننـــد تا حـــدودی آرمانی به نظر می‌رســـد، به‌خصـــوص در مورد مراحل اولیهٔ رشـــد درک و فهم کـــودکان که هنـــوز عددها به‌صـــورت ملموس حس می‌شـــوند تا به‌صورت مفهومی مجرد، در حقیقت این طور دیده می‌شود که از نگاه دانش‌آموزان، مدل‌سازی، یک فرآیند رفت و برگشتی دو مرحله‌ای است و نه یک چرخهٔ چهار مرحلـــه‌ای. یعنی یک بار فکر کردن برای حرکت رو به جلو از بدنهٔ دنیای واقعی به بدنهٔ ریاضی و یک بار نیز حرکت رو به عقب از بدنهٔ نمادین ریاضیات به بدنهٔ دنیای واقعی؛ اما با وجود این نوع نگاه از جانب دانش‌آموزان، ایـــن فرآیند چرخه‌مانند بیشـــتر برای معلمان و افزایش شـــناخت آن‌ها از مدل‌سازی اهمیت دارد. معلمان مدارس ابتدایی باید بدانند که در جریان یک مدل‌ســـازی، چهار اتفاق ذهنی بـــا ارزش در حال وقوع است: نمایاندن، محاسبه کردن، تفسیر کردن و امتحان کردن[۳۰]. معلمان باید بدانند که امروزه ریاضیات صرفاً چیزی مانند گام ۲ نیست.

مثال های عملی

فرض کنید که از یک دانش‌آموز خواســـته باشیم تـــا قیمت ۱۶ باتری از یک نوع مشـــخص را پیدا کند، در صورتی که می‌دانیم آن نوع مشخص از باتری‌ها در بازار تنها در بسته‌هایی ۳ تایی و با قیمت هر بسته ۶۵ پنی عرضه می‌شود. در آغاز، دانش‌آموز تلاش می‌کند که تعداد بسته‌هایی که لازم اســـت خریداری شود را مشخص کند و معمولاً این کار را به صورت ۳÷۱۶ (یا جمع ســـه‌تا سه‌تای بسته‌ها برای رسیدن به ۱۶ یعنی ... + ۳+ ۳+ ۳) انجـــام می‌دهـــد. در حقیقت این کار او اولین گام فرآیند مدل‌سازی یعنی نمایاندن مسئله در قالب نمادهای ریاضی محسوب می‌شود. او با این کار از مفاهیم ملموس، مانند تعداد بسته‌ها و باتری‌ها، به‌سمت مفاهیم مجرد، مانند اعـــداد ۳ و ۱۶ و نمادهای ÷ و +، حرکت کرده اســـت. در گام دوم، او به کمک روش‌های محاســـبه‌ای که یاد گرفته اســـت مشغول به محاسبه خواهد شد تا این که به جواب «۵تا بستهٔ ۳تایی می‌شود و یکی هم باقی می‌ماند» برسد. در این مرحله، نمی‌توان در مورد میزان فهم دانش‌آموز از عملیات و محاسبه‌ای کـــه انجام می‌دهد قضاوت کرد. یعنی واقعاً مشـــخص نیســـت که او در حین انجام عمـــل ۳÷ ۱۶، به ارکان مســـئلهٔ واقعی نیز توجهی دارد یا این‌که کاملاً در این مرحله، در دنیای ریاضیات سیر می‌کند؟ اگر دانش‌آموز درگیر انجام تقسیم از روش رسمی آن باشد، اعداد ۱۶ و ۳ تنهـــا برای او حکم همان عـــدد را دارند تا این که به منزلهٔ تعداد باتری‌ها باشـــند؛ اما اگر از روش جمع سه‌تا سه‌تای باتری‌ها و رسیدن به ۱۶ استفاده کند، در این صورت ممکن اســـت این سه‌تا سه‌تاها در ذهن او به منزلهٔ ۳ تا باتری ۳ تا باتری باشـــد تا به ۱۶ تا باتری برسد. در این روش دوم، او هنوز به‌طور کامل به دنیای ریاضی وارد نشده است و در واقع، کاری انتزاعی به آن معنا اتفاق نیفتاده است. به هر حال، حاصل مرحلهٔ دوم، «۵تا بستهٔ ۳تایی می‌شـــود و یکی هم باقی می‌ماند» خواهد بود و این پاسخ باید در گام سوم به قالب اصیل خود که مســـئلهٔ واقعی در آن قالب مطرح بوده است، تفســـیر شود. مثلاً به پاسخ «ما برای داشتن ۱۶ باتری به ۵ بسته از آن و یک باتری تک احتیاج داریم» تفسیر شـــود. دانش‌آموز باید در گام چهارم، این پاسخ را چک کند و ببیند که آیا از آن نتیجه و معنایی منطقی حاصل می‌شود که با محدودیت‌ها و شروط مسئلهٔ واقعی نیز همخوانی داشـــته باشـــد یا خیر؟ پاسخ صحیح بعد از مرحلهٔ امتحان کردن و مطابقت دادن با محدودیت‌های مسئلهٔ واقعی این خواهد بود که «شما اصلاً نمی‌توانید یک باتری تک از این نوع را بخرید و مجبورید باتری‌ها را در تعداد مشخصی از بسته‌ها بخرید، مثلاً برای داشتن ۱۶ باتری، لازم است که ۶ بسته از آن را بخرید».

با دقت بیشتر به پاسخ نهایی مسئلهٔ فوق، متوجه آن می‌شویم که باید فرآیند مدل‌سازی از نو آغاز شود! یعنی این بار مســـئله یافتن قیمت ۶ بســـته از آن نوع باتری‌هاست. گام اول عمل نمایاندن این مسئله با یک قالب نمادین مثل ۶×۶۵ می‌باشـــد (و اگر واحد قیمت بر حسب پوند باشـــد، عبارت ۶×۰/۶۵ لازم است). در

گام دوم، عملیات محاسبهٔ این عبارت انجام می‌شود که ممکن اســت این محاسبه به سه صورت ذهنی، کتبی و یا بهره‌گیری از ماشــین حســاب انجام شود و پاسخ ۳۹۰ بدست می‌آید (در حالتی که واحد پول بر حسب پوند باشــد پاسخ ۳/۹ اســت). در گام سوم، این پاسخ را به شــرایط واقعی در دنیایی که مســئله در آن قرار دارد برمی‌گردانیم (تفسیر می‌کنیم). در مرحلهٔ آخر هم میزان تناسب پاسخ با شرایط و محدودیت‌های مسئلهٔ اصلی سنجیده می‌شود. در واقع در این مرحله، میزان منطقی و قابل قبول بودن پاســخ را ارزیابی می‌کنیم. مثلاً ممکن است دانش‌آموزی که با ماشین حساب کار می‌کند و قرار اســت پاسخ را بر حسب واحد پنی ارائه کند به اشــتباه عدد ۳۹۰ پوند (که بر روی نمایشــگر ماشین‌حساب درج شده است) را می‌خواند. یعنی پاسخ این دانش آموز این اســت که برای خرید ۶ بسته از آن باتری‌ها باید ۳۹۰ پوند هزینه کنیم! با کمی فکر کردن، اکثر دانش‌آموزان متوجه می‌شوند که وقتی قیمت هر بسته چیزی کمتر از یک پوند است، امکان ندارد قیمت ۶ بســته از آن‌ها در حدود ۳۶۰ پوند و به شدت گران باشد، لذا جایی از کار ایراد دارد.

یک دختر بچهٔ ۱۰ســاله، عبارت ۱۲÷۵۰ را برای مدل‌سازی این ســوال که «چند جعبهٔ ۱۲تایی برای بسته‌بندی ۵۰ ماشین‌حســاب احتیاج است؟»، به‌کار برده اســت. او پس از چند لحظه فکر کردن، پاســخ «شــما در واقع ۴ بســته لازم دارید»، یا این که «باید ۲ تا از ماشین‌حســاب‌ها را بی‌خیال شویم و در کشوی میز معلم نگهداری کنیم» را ارائه می‌کند. فکر می‌کنید او با این پاسخ‌ها در برداشتن کدام گام از ۴ گام فرآیند مدل‌ســازی، خیلی خوب عمل کرده است؟ پاسخ گام چهارم است. او با این پاسخ نشان می‌دهد که به خوبی از عهدهٔ این گام از چرخهٔ مدل‌سازی برآمده است.

مطالعهٔ بیشتر

فصل سوم از هایلاک (۲۰۰۶)، حاوی توضیحاتی مکمل برای مبحث مدل‌سازی است که در بخش حاضر نیز به قســمت‌هایی از آن اشاره کرده‌ایم. در این فصل، به‌طور دنباله‌داری چگونگی فرآیند مدل‌سازی و درک و فهم دقیق از آن در مسائل مبتنی بر چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اشاره شده است. برای پی بردن به چگونگی ارتباط مدل‌سازی درست و دقیق در ریاضی بــا توانایی دانش‌آموزان پایه‌های بالاتــر دورهٔ ابتدایی، می‌تــوان به یکی از گزارش‌های پژوهشــی از انگلیش (در پــوت[31] و همکارانش، ۲۰۰۴) با نام «مدلســازی ریاضی در مدرســهٔ ابتدایی[32]» مراجعه کنید. انگلیش متوجه چندین عامل اجتماعی و عامل ریاضی در حین این پژوهش می‌شــود و آن‌ها را در مدل‌سازی درست و دقیــق، دخیل و مؤثر می‌داند. این عوامل عبارتند از: تفسیر کردن داده‌ها و باز تفسیر آن‌ها، اتخاذ تصمیم‌های درست، استدلال‌های موجه و قابل دفاع، فرضیه‌سازی و بیان مباحــث گوناگون به همــراه بحث‌های مقابل آن‌ها. همچنین در یک پژوهش مشابه، انگلیش و واترز (۲۰۰۵)، نتایج و مثال‌هایی مشابه را برای دانش‌آموزان پایه‌های پایین‌تر ابتدایی ارائه کرده‌اند.

پی‌نوشت‌ها

1. Anxiety about mathematics
2. Complex emotional response
3. Page and Thomas
4. Ford
5. Working Memory
6. Ashcraft and Kirt
7. Buxton
8. On the cognitive consequences of mathematics anxiety
9. Donlan
10. Aims of mathematics teaching
11. Utilitarian
12. Application
13. Transferable skills
14. Aesthetic
15. Epistemological
16. Goulding
17. Freudenthal
18. Mathematics as an Educational Task
19. Thinking skills
20. Why teach mathematics?
21. Paul Ernest
22. White and Bramall
23. Modeling Process (Representing)
24. Assessment theory
25. Reliable
26. English
27. Watters
28. Representing
29. Modeled
30. Representing, Calculating, Interpreting, Checking
31. Putt
32. Mathematical Modeling in the Primary school